جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

@JOZVE_IUT

پایان ترم درس ریاضی عمومی ۲ دی ماه ۹۳ مدت: ۱۱۰ دقیقه

نام استاد : [illegible]

نام و نام خانوادگی : [redacted] شمارهٔ دانشجویی : [redacted]

تذکّر : از بین سوالات ۱، ۲، ۳ و ۴ فقط به سه سوال به دلخواه جواب دهید.

۱. مطلوبست محاسبه انتگرال خط $\int_C (x-y)dx + (x+y)dy$ که درآن C بیضی $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ می باشد.

۲. به کمک قضیه گرین انتگرال خط $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + [xy^2 + y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$ را بیابید که درآن C مستطیلی با رئوس $(4,5), (4,0), (1,0)$ و $(1,5)$ است.

۳. مطلوبست محاسبه مساحت قسمتی از یک کره به معادله $x^2+y^2+z^2 = 4$ که درون استوانه $x^2+y^2 = 2y$ قرار دارد.

۴. مطلوبست محاسبه انتگرال خط $\int_C F\cdot dr$ با استفاده از قضیه استوکس، که در آن $F(x,y,z) = (-y, x^2, z)$ و C محل تلاقی صفحه $x+y+z=2$ با استوانه $x^2+y^2=1$ در جهت مثبت محور z ها عکس عقربه ساعت است.

$Z = 2 - x - y$

۵. فرض کنید T ناحیه محصور به درون مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ و محدود بین کره های $x^2+y^2+z^2 = 2z$ و $x^2+y^2+z^2 = 4z$ باشد. مطلوبست محاسبه ی

الف) حجم ناحیه T.

ب) $\int_S\int F\cdot n\,d\sigma$ که S رویه بسته محصور کننده T و n بردار نرمال یکه قائم S رو به خارج است و

$$F(x,y,z) = (x-y, 2y+3z, z+4x).$$

$(z, y, 1)$

$(1, -1, 1)$

موفق باشید

(x,y) و (y,z) و (x,z)

نام و نام خانوادگی: .... شماره دانشجوئی: .... نام درس: ....

گروه درس: .... نام استاد: .... تاریخ: .... نمره: ....

---

۱. گرین

$$\iint_A (Q_x - P_y)\,dA = \iint_A 1-(-1)\,dA = 2\iint_A 1\,dA$$

$$= 2 \times (\text{مساحت } A)$$

$$2 \times (2\times 1\times \pi) = 4\pi$$

نکته: مساحت بیضی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow S = \pi ab$$

---

۲. گرین

$$\iint_A Q_x - P_y\,dA = \iint_A \left[y^2 + y\left(\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right] dA$$

$$= \iint_A y^2\,dA \xrightarrow[1\le x\le 4]{0\le y\le 5} = \int_0^5\int_1^4 y^2\,dx\,dy = 125$$

---

۳. در انتگرال سطح مجاز است که یک متغیر حذف شود (در اینجا مجاز است حذف شود چون فقط در یک ناحیه دیده می‌شود)

$$z = \sqrt{4-x^2-y^2} \Rightarrow z_x = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$z_y = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$z_z = 1$$

نام درس: .... شماره دانشجویی: ....

گروه درس: .... نام استاد: .... تاریخ: .... نمره: ....

۱ از ۳

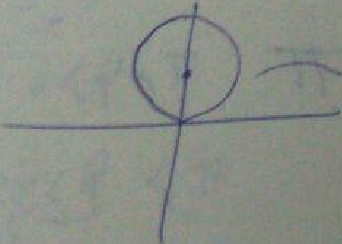
$$\iint 1\, ds = \iint_A \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}\; dA$$

$$= \iint \sqrt{\frac{4}{4-x^2-y^2}}\; dx\,dy = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} r\sqrt{\frac{4}{4-r^2}}\; dr\,d\theta$$

$x^2+y^2=2y$

$x^2+y^2=2y \longrightarrow r^2 = 2r\sin\theta$

$x^2+(y-1)^2=1 \quad \boxed{0<r<2\sin\theta}$



$\longrightarrow 0<\theta<\pi$

$$= -4\int_0^{\pi} \cos\left(\sin^{-1}\frac{r}{2}\right)\Big|_0^{2\sin\theta} d\theta$$

$$= -4\int_0^{\pi} (\cos\theta - 1)\, d\theta$$

$$= -4(\sin\theta - \theta)\Big|_0^{\pi} =$$ راحت است ((:

حل انتگرال $\leftarrow \int r\sqrt{\frac{4}{4-r^2}}\, dr$

$r = 2\sin t$

$dr = 2\cos t\, dt$

$$\int r\sqrt{\frac{4}{4-r^2}}\, dr = \int 2\sin t\sqrt{\frac{4}{4-4\sin^2 t}}\; 2\cos t\, dt = \int 4\sin t\cos t\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}\, dt$$

$$= \int 4\sin t\, dt = \boxed{-4\cos t} = -4\cos\left(\sin^{-1}\frac{r}{2}\right)$$

۴.

$$\int\int F\cdot dr = \iint \operatorname{curl} F\cdot n \, dA$$

$x+y+z=2$

$n=(1,1,1)$

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & x^2 & z \end{vmatrix} = (0,0,1+2x)$$

$$= \iint_{x^2+y^2=1} (0,0,1+2x)\cdot(1,1,1)\, dA = \iint_{x^2+y^2=1} 1+2x \; dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+2r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta = \pi$$

نام و نام خانوادگی: .... شماره دانشجوئی: .... نام درس: ....

گروه درس: .... نام استاد: .... تاریخ: .... نمره: ....

---

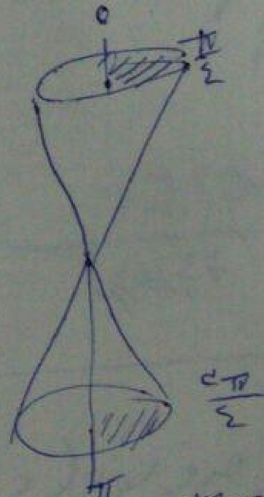
۵. الف) حجم T

$$\iiint 1\, dV$$

تغییر متغیر کروی

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2z \Rightarrow \rho^2 = 2\rho\cos\varphi \Rightarrow \boxed{\rho = 2\cos\varphi} \\ x^2+y^2+z^2=4z \Rightarrow \rho^2 = 4\rho\cos\varphi \Rightarrow \boxed{\rho = 4\cos\varphi} \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \rho\cos\varphi = \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi} = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \sin\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$



ولی چون گفته درون مخروط پس

$0<\varphi<\frac{\pi}{4}$

$\frac{3\pi}{4}<\varphi<\pi$

$$0<\theta<2\pi$$

$$\Rightarrow \iiint 1\, dV = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} \rho^2\sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

که حل کردنش راحت است :)))

ب:

$$\iint F\cdot n\, dS = \iiint \operatorname{div} F\, dV = \iiint 1+2+1\, dV$$

$$= 4 \times (\text{حجم } T)$$ الف ←

باسمه تعالی

پاسخ سوالات امتحان پایان ترم ریاضی عمومی ۲

نیمسال اول ۹۵-۹۴

۱. فرض کنید $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4\}$. با ذکر دلیل، اکسترمم‌های نسبی و مطلق و نقاط زینی تابع $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 1$ را بر روی ناحیه بسته و کراندار R تعیین نمائید. (۱۲ نمره)

پاسخ سوال ۱. ابتدا با حل معادله $\nabla f = 0$ نقاط بحرانی درون ناحیه را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \quad \Rightarrow (x,y) = (1,0).$$

با توجه به آزمون مشتق دوم، نقطه $(1,0)$ یک نقطه زینی است و تابع در این ناحیه اکسترمم نسبی ندارد.

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, B = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2, C = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad \Rightarrow AB - C^2 = -4 < 0.$$

حال اکسترمم‌های روی مرز را بدست می‌آوریم.

راه اول. قرار می‌دهیم $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4$ و اکسترمم‌های f تحت قید $g(x,y) = 0$ را با روش لاگرانژ بدست می‌آوریم. باید معادله $\nabla f - \lambda \nabla g = 0$ را حل کنیم.

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 2x - 2 - 2\lambda x = 0, \tag{1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = -2y - 8\lambda y = 0, \tag{2}$$
$$x^2 + 4y^2 = 4. \tag{3}$$

$$(2) \to \begin{cases} y = 0 \xrightarrow{(3)} x = \pm 2. \\ \lambda = -\frac{1}{4} \xrightarrow{(1)} x = \frac{4}{5} \xrightarrow{(3)} y = \pm\frac{\sqrt{21}}{5}. \end{cases}$$

بنابراین نقاط $(\pm 2, 0)$ و $(\frac{4}{5}, \pm\frac{\sqrt{21}}{5})$ بدست می‌آید.

(x,y)	$f(x,y)$	
$(1,0)$	0	
$(2,0)$	1	
$(-2,0)$	9	ماکسیمم مطلق
$(\frac{4}{5}, \pm\frac{\sqrt{21}}{5})$	$\frac{-4}{5}$	می‌نیمم مطلق

(۴)

راه دوم. خم مرز $x^2 + 4y^2 = 4$ را بصورت زیر پارامتری می‌کنیم.

$$x(t) = 2\cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

حال اکستزم تابع زیر را پیدا می‌کنیم.

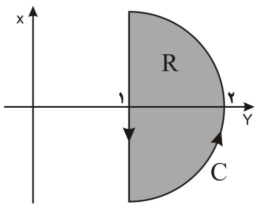
$$g(t) = f(x(t), y(t)) = 4\cos^2 t - \sin^2 t - 4\cos t + 1 = 5\cos^2 t - 4\cos t.$$

$$g'(t) = 0 \Rightarrow -10\sin t\cos t + 4\sin t = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \text{ یا } \cos t = \frac{2}{5}.$$

$$\Rightarrow (x, y) = (\pm 2, 0),\ (\frac{4}{5}, \pm\frac{\sqrt{21}}{5}).$$

---

۲. فرض کنید ناحیه‌ی بسته و کران‌دار R در صفحه محدود به خط $x = 1$ و نیم‌دایره به معادله‌ی $(x^2 + y^2 - 2x = 0, x \geq 1)$ و C مرز آن (در جهت مثلثاتی) باشد. (مطابق شکل)



الف) مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال دوگانه $\iint_R \frac{x}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$.

(راهنمایی: معادله‌ی خط $x = 1$ در دستگاه قطبی به صورت $r = \frac{1}{\cos\theta}$ است.) (۹ نمره)

ب) با فرض $\mathbf{F}(x, y) = x\ln(x^2 + y^2)\,\mathbf{i} + (y + 1)\ln(x^2 + y^2)\,\mathbf{j}$، مطلوبست تعیین $\int_C \mathbf{F}.dr$. (۷ نمره)

پاسخ سوال ۲. الف) معادله دایره در دستگاه قطبی برابر $r = 2\cos\theta$ است. همچنین محل تقاطع خط $x = 1$ و دایره برابر است با

$$2\cos\theta = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4}.$$

بنابراین ناحیه R در دستگاه قطبی بصورت زیر توصیف می‌شود.

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\quad \frac{1}{\cos\theta} \leq r \leq 2\cos\theta.$$

لذا

$$\iint_R \frac{x}{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta} \frac{r\cos\theta}{r^2} r\, dr\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2\theta - 1)\, d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 1.$$

پاسخ سوال ۲. ب) راه اول. چون $\mathbf{F}$ در ناحیه R دارای مشتقات جزیی پیوسته و C یک خم بسته ساده است، می‌توان از قضیه گرین استفاده کرد.

$$\int_C \mathbf{F}.dr = \iint_R (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dx\, dy = \iint_R \frac{2x(y+1)}{x^2 + y^2} - \frac{2xy}{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$
$$= 2\iint_R \frac{x}{x^2 + y^2}\, dx\, dy = 2.$$

که تساوی آخر بدلیل قسمت الف است.

راه دوم. فرض کنید C_1 خم نیم‌دایره و C_2 خط راست باشد. معادله پارامتری نیم‌دایره بصورت زیر است.

$$x = 1 + \cos t,\quad y = \sin t,\quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\int_{C_۱} \mathbf{F}.dr &= \int_{C_۱} P\,dx + Q\,dy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} (۱+\cos t)\ln(۲+۲\cos t)(-\sin t) + (۱+\sin t)\ln(۲+۲\cos t)\cos t\,dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} (\cos t - \sin t)\ln(۲+۲\cos t)dt = \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \cos t \ln(۲+۲\cos t)dt \\ &\overset{\text{جزء به جزء}}{=} \sin t \ln(۲+۲\cos t)\Big]_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} - \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{-۲\sin^۲ t}{۲+۲\cos t}\,dt \\ &= ۲\ln ۲ - \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} (\cos t - ۱)\,dt = ۲\ln ۲ - ۲ + \pi.\end{aligned}$$

همچنین معادله پارامتری خط راست به‌صورت زیر است.

$$x = ۱,\quad y = -t,\quad -۱ \le t \le ۱.$$

$$\begin{aligned}\int_{C_۲} \mathbf{F}.dr = \int_{C_۲} P\,dx + Q\,dy &= \int_{-۱}^{۱} (t-۱)\ln(۱+t^۲)\,dt = -\int_{-۱}^{۱} \ln(۱+t^۲)\,dt \\ &\overset{\text{جزء به جزء}}{=} -t\ln(۱+t^۲)\Big]_{-۱}^{۱} + \int_{-۱}^{۱} \frac{۲t^۲}{۱+t^۲}\,dt = -۲\ln ۲ + \int_{-۱}^{۱} (۲ - \frac{۲}{۱+t^۲})\,dt \\ &= -۲\ln ۲ + ۴ - ۲\tan^{-۱} t\Big]_{-۱}^{۱} = -۲\ln ۲ + ۴ - \pi.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_C \mathbf{F}.dr = \int_{C_۱} \mathbf{F}.dr + \int_{C_۲} \mathbf{F}.dr = ۲\ln ۲ - ۲ + \pi - ۲\ln ۲ + ۴ - \pi = ۲.$$

---

۳. فرض کنید R در صفحه ناحیه‌ی مربع شکلی باشد که محدود به خطوط با معادلات $x+y=۱$ و $x+y=-۱$ و $x-y=۱$ و $x-y=-۱$ است. یعنی رئوس آن نقاط $A=(۱,۰)$ و $B=(۰,۱)$ و $C=(-۱,۰)$ و $D=(۰,-۱)$ باشند.

الف) مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال دوگانه $\iint_R (x-y)\cos(x^۲-y^۲)\,dx\,dy$. (۹ نمره)

ب) مکعب مستطیلی را در نظر بگیرید که قاعده‌ی آن R و یال‌هایش موازی محور zها هستند. اگر خم C محل تلاقی سطح جانبی این مکعب مستطیل با نیمکره به معادله‌ی $z=\sqrt{۴-x^۲-y^۲}$ باشد (C در جهت مثبت)، مطلوبست تعیین $\int_C \mathbf{F}.dr$ که در آن $\mathbf{F}(x,y,z) = (x-\sin(x^۲-y^۲))\,\mathbf{i} + \sin(x^۲-y^۲)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. (۸ نمره)

پاسخ سوال ۳. الف) با تغییر متغیر $u=x+y$ و $v=x-y$ داریم $x=(u+v)/۲$ و $y=(u-v)/۲$ و

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲}\\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲}\end{pmatrix}\right| = \frac{۱}{۲}.$$

همچنین ناحیه R بصورت $(-۱ \le u \le ۱, -۱ \le v \le ۱)$ توصیف می‌شود. بنابراین

$$\iint_R (x-y)\cos(x^۲-y^۲)\,dx\,dy = \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}\int_{-۱}^{۱} v\cos(uv)\,du\,dv = \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱} \sin(uv)\Big]_{-۱}^{۱} dv$$
$$= \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱} ۲\sin v\,dv = -\cos v\Big]_{-۱}^{۱} = ۰.$$

پاسخ سوال ۳. ب) اگر S رویه کره به معادله $z = g(x,y) = \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ باشد، با استفاده از قضیه استوکس داریم

$$\int_C \mathbf{F}.dr = \iint_S \operatorname{Curl}\mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma.$$

اما

$$\operatorname{Curl}\mathbf{F} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x - \sin(x^۲ - y^۲) & \sin(x^۲-y^۲) & z \end{pmatrix} = ۲(x-y)\cos(x^۲-y^۲)\mathbf{k}.$$

همچنین

$$\mathbf{n} = \frac{(۲x, ۲y, ۲z)}{۲\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}} = \frac{۱}{۲}(x,y,z) = \frac{۱}{۲}(x, y, \sqrt{۴-x^۲-y^۲}).$$

و

$$\operatorname{Curl}\mathbf{F}.\mathbf{n} = (x-y)\cos(x^۲-y^۲)\sqrt{۴-x^۲-y^۲}.$$

به علاوه

$$d\sigma = \sqrt{۱ + (\frac{\partial g}{\partial x})^۲ + (\frac{\partial g}{\partial y})^۲}\,dx\,dy = \sqrt{۱ + \frac{x^۲+y^۲}{۴-x^۲-y^۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۴-x^۲-y^۲}}\,dx\,dy.$$

بنابراین

$$\iint_S \operatorname{Curl}\mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_R ۲(x-y)\cos(x^۲-y^۲)\,dx\,dy = ۰.$$

که تساوی آخر بدلیل قسمت الف است.

---

۴. الف) حجم ناحیه T در فضا محصور به دو مخروط به معادلات $z = \sqrt{x^۲+y^۲}$ و $z = \sqrt{۳x^۲+۳y^۲}$ و کره‌های به معادلات $x^۲+y^۲+z^۲ = ۱$ و $x^۲+y^۲+z^۲ = ۴$ را بیابید. (۸ نمره)

ب) اگر $\mathbf{F} = (۲x + yz^۲)\,\mathbf{i} + (y - ۵x^۳z)\,\mathbf{j} + (x+y+z)\,\mathbf{k}$ و S رویه‌ی محصورکننده‌ی ناحیه‌ی T در (الف) باشد، مطلوبست محاسبه‌ی $\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\,d\sigma$.

پاسخ سوال ۴. الف) معادله دو مخروط در دستگاه کروی به‌صورت $\tan\phi = ۱$ و $\tan\phi = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و معادله دو کره در دستگاه کروی به صورت $\rho = ۱$ و $\rho = ۲$ است. بنابراین ناحیه T در دستگاه کروی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$۰ \le \theta \le ۲\pi, \quad \frac{\pi}{۶} \le \phi \le \frac{\pi}{۴}, \quad ۱ \le \rho \le ۲.$$

لذا با استفاده از تغییر متغیر کروی داریم

$$\text{حجم}\, T = \iiint_T dx\,dy\,dz = \int_۰^{۲\pi} \int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}} \int_۱^۲ \rho^۲ \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_۰^{۲\pi} \int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۴}} (\frac{۸}{۳} - \frac{۱}{۳}) \sin\phi\, d\phi\, d\theta = ۲\pi \frac{۷}{۳}(\cos\frac{\pi}{۶} - \cos\frac{\pi}{۴}) = \frac{۷\pi(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})}{۳}.$$

پاسخ سوال ۴. ب) چون $\mathbf{F}$ درون T دارای مشتقات جزیی پیوسته است، طبق قضیه دیورژانس داریم

$$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz.$$

اما

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = ۲ + ۱ + ۱ = ۴.$$

بنابراین

$$\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_T ۴\, dx\, dy\, dz = ۴ \times \text{حجم}\, T = \frac{۲۸\pi(\sqrt{۳} - \sqrt{۲})}{۳}.$$

تساوی آخر بدلیل قسمت الف است. (۷ نمره)

موفق باشید

۱ — فرض کنید $f(x,y)=4-x^2-y^2$ ،$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 2y\}$ و میدان برداری $\mathbf{F}$ با ضابطه‌ی $\mathbf{F}=(xz)\mathbf{i}+(3yz+x^2)\mathbf{j}+y^2\mathbf{k}$ داده شده باشد.

الف) با تعیین اکسترمم‌های تابع f روی ناحیه‌ی D، نشان دهید که برای هر $(x,y)\in D$، $f(x,y)\geq 0$.

ب) مطلوبست تعیین مقدار عبارت $\iint_D x\,dxdy$.

ج) اگر C خم حاصل از تلاقی رویه به معادله‌ی $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ با استوانه‌ی به معادله‌ی $x^2+y^2=2y$ و با جهت حرکت مثبت (نسبت به نرمال خارجی کره) باشد، مطلوبست محاسبه‌ی $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$.
(۲۲ نمره)

حل. الف) (۸ نمره) ابتدا نقاط بحرانی f بر $\mathbb{R}^2$ را به دست می‌آوریم. با توجه به مشتق‌پذیری این تابع، نقاط بحرانی آن جواب‌های معادلات $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ هستند.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=-2x=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y=0\end{cases}$$

به این ترتیب نقطه‌ی $(0,0)$ تنها نقطه‌ی بحرانی این تابع بر $\mathbb{R}^2$ است که روی مرز ناحیه‌ی D قرار دارد. پس این تابع درون D هیچ نقطه‌ی بحرانی ندارد. اکنون اکسترمم‌های f روی مرز (یا تحت شرط $g(x,y):=x^2+y^2-2y=0$) را به دست می‌آوریم. با استفاده از روش لاگرانژ، نقاط مورد نظر جواب‌های معادلات زیر است.

$$\begin{cases}\nabla f=\lambda\nabla g\\[2mm] g(x,y)=0\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}-2x=2\lambda x\\ -2y=2\lambda(y-1)\\ x^2+y^2-2y=0\end{cases}$$

تنها جواب‌های این معادلات نقاط $(0,0)$ و $(0,2)$ هستند. با مقایسه‌ی مقادیر تابع f در این نقاط

$$\min_D f=f(0,2)=0 \qquad , \qquad \max_D f=f(0,0)=4$$

در نتیجه

$$\forall(x,y)\in D,\qquad 0=\min_D f\leq f(x,y)\leq \max_D f=4$$

ب) (۵ نمره) با استفاده از تغییر متغیر قطبی،

$$\begin{aligned}\iint_D x\,dxdy &= \int_0^\pi\int_0^{2\sin\theta} r\cos\theta r\,drd\theta=\int_0^\pi \cos\theta\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{2\sin\theta}d\theta\\ &= \frac{8}{3}\int_0^\pi \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{8}{12}\sin^4\theta\Big|_0^\pi=0\end{aligned}$$

ج) (۹ نمره) فرض کنیم S قسمتی از نیم‌کره $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ محصور توسط استوانه‌ی $x^2+y^2=2y$ باشد. بنابر قضیه‌ی استوکس

$$\int_C F\cdot dr=\iint_S curlF\cdot n\,d\sigma$$

که در آن $\mathbf{n} = \frac{۱}{۲}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ بردار قائم یکه بر S رو به سمت خارج است. داریم

$$curlF = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & ۳yz + x^۲ & y^۲ \end{pmatrix} = (-y)i + xj + ۲xk$$

در نتیجه

$$\int_C F \cdot dr = \iint_S xz\, d\sigma$$

فرض کنیم D ناحیه‌ی محصور توسط دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲y$ باشد. با توجه به اینکه S قسمتی از رویه به معادله‌ی $z = \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ با شرط $(x, y) \in D$ است، خواهیم داشت

$$\int_C F \cdot dr = \iint_D x\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}\frac{۲}{\sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}}dxdy = ۲\iint_D x\, dxdy$$

بنابر قسمت قبل، حاصل این انتگرال برابر صفر است.

۲— فرض کنید D ناحیه‌ی محصور توسط خم بسته‌ی $|x| + |y| = ۱$ باشد (مطابق شکل زیر)

الف) مطلوبست محاسبه‌ی $\iint_D (x^۲ - y^۲)\, dxdy$.

ب) مطلوبست محاسبه‌ی $\int_C (y^۳ + x^۲ - y)dx + (x^۳ + y^۲)dy$ که در آن C خم بسته‌ی $|x| + |y| = ۱$ و جهت حرکت بر روی آن جهت مثبت باشد. (۱۴ نمره)

حل.الف) (۷ نمره) با معرفی متغیرهای جدید u و v به صورت $u = x + y$ و $v = x - y$، و یا $x = \frac{۱}{۲}(u + v)$ و $y = \frac{۱}{۲}(u - v)$ خواهیم داشت

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = det\begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{pmatrix} = -\frac{۱}{۲}$$

و از آنجا

$$\iint_D (x^۲ - y^۲)dxdy = \frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}\int_{-۱}^{۱} uv\, dudv = ۰$$

ب) (۷ نمره) با استفاده از قضیه‌ی گرین،

$$\begin{aligned} \int_C (y^۳ + x^۲ - y)dx + (x^۳ + y^۲)dy &= \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy \\ &= \iint_D (۳x^۲ - ۳y^۲ + ۱)dxdy \\ &= ۳\iint_D (x^۲ - y^۲)dxdy + \iint_D dxdy \\ &= ۰ + A \end{aligned}$$

که در آن A، مساحت ناحیه‌ی D، برابر ۲ است.

۳— فرض کنید $\mathbf{F}(x,y,z)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$، S_1 قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=2$ بالای صفحه‌ی $z=1$ و S_2 قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ زیر این صفحه باشد. همچنین فرض کنید T ناحیه‌ی محصور توسط $S_1\cup S_2$ است.

الف) مطلوبست محاسبه‌ی حجم ناحیه‌ی T.

ب) مطلوبست محاسبه‌ی $\iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ که در آن $\mathbf{n}$ بردار نرمال بر S_1 رو به سمت خارج کره است.

ج) مطلوبست محاسبه‌ی $\iint_{S_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ که در آن $\mathbf{n}$ بردار نرمال بر S_2 رو به سمت پایین است. (۲۴ نمره)

حل. الف) (۶ نمره) با بردن به دستگاه مختصات کروی، خواهیم داشت

$$T=\{(\rho,\phi,\theta)\mid 0\le\theta\le 2\pi\,,\ 0\le\phi\le\frac{\pi}{4}\,,\ 0\le\rho\le\sqrt{2}\}$$

پس

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2\sin\phi\,d\rho d\phi d\theta\\ &= 2\pi\Big(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\phi\,d\phi\Big)\Big(\int_0^{\sqrt{2}}\rho^2\,d\rho\Big)\\ &= 2\pi(1-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{2\sqrt{2}}{3})=\frac{4\pi}{3}(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

ب) (۱۰ نمره) تصویر S_1 بر صفحه‌ی xoy ناحیه‌ی $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\le 1\}$ است. با توجه به اینکه بر این ناحیه $z=f(x,y)=\sqrt{2-x^2-y^2}$، داریم

$$N=\frac{x}{\sqrt{2-x^2-y^2}}i+\frac{y}{\sqrt{2-x^2-y^2}}j+k\quad,\quad n=\frac{N}{\|N\|}\quad,\quad d\sigma=\|N\|dxdy$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\iint_{S_1}F\cdot nd\sigma &= \iint_R F\cdot\frac{N}{\|N\|}\,\|N\|\,dxdy=\iint_R F\cdot Ndxdy\\ &= \iint_R\Big(\frac{x^2}{\sqrt{2-x^2-y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{2-x^2-y^2}}+\sqrt{2-x^2-y^2}\Big)\,dxdy\\ &= \iint_R\frac{2}{\sqrt{2-x^2-y^2}}\,dxdy\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{2r}{\sqrt{2-r^2}}drd\theta=4\pi(\sqrt{2}-1)\end{aligned}$$

ج) (۸ نمره)

روش اول. اگر $S:=S_1\cup S_2$ آنگاه با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس و توجه به اینکه $div\mathbf{F}=3$، با استفاده از قسمت (الف) خواهیم داشت

$$\iint_S F\cdot n\,d\sigma=\iiint_T divF\,dV=3\iiint_T dV=3\frac{4\pi}{3}(\sqrt{2}-1)=4\pi(\sqrt{2}-1)$$

به این ترتیب، با استفاده از قسمت (ب)،

$$\iint_{S_2}F\cdot n\,d\sigma=\iint_S F\cdot n\,d\sigma-\iint_{S_1}F\cdot n\,d\sigma=4\pi(\sqrt{2}-1)-4\pi(\sqrt{2}-1)=0$$

روش دوم. تصویر $S_۲$ بر صفحه‌ی xoy همان ناحیه‌ی R است. با توجه به اینکه برای این رویه $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$، داریم

$$N = \frac{\partial z}{\partial x} i + \frac{\partial z}{\partial y} j - k = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} i + \frac{y}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} j - k$$

در نتیجه، بر روی این رویه

$$F \cdot N = \frac{x^۲}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} + \frac{y^۲}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} - \sqrt{x^۲ + y^۲} = \frac{x^۲ + y^۲ - (x^۲ + y^۲)}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} = ۰$$

به این ترتیب،

$$\iint_{S_۲} F \cdot n d\sigma = \iint_R F \cdot \frac{N}{\|N\|} \|N\| dx dy = ۰$$

به نام خالق یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده‌ی علوم ریاضی

آزمون پایان ترم ریاضی عمومی ۲ خردادماه ۱۳۹۱ مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی .... شماره دانشجویی .... مدرس.............

---

۱) الف) (۲۰ نمره) فرض کنید $z = z(x,y)$ **به صورت ضمنی با معادله‌ی** $h(x^۲ + y^۲, z) = ۰$ **داده شده باشد که در آن** h **تابعی دو متغیره با مشتقات جزیی مرتبه‌ی اول پیوسته و غیر صفر است. ثابت کنید**

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = ۰$$

ب) (۲۰ نمره) اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x,y) = x^۲ + y^۲ - ۲y + ۱$ **را در ناحیه‌ی بسته و کراندار** $R = \{(x,y) : ۴x^۲ + y^۲ \leq ۴\}$ **بیابید.**

---

۲) الف) (۲۰ نمره) انتگرال دوگانه‌ی $\iint_D y\,dA$ **را محاسبه کنید که در آن**

$$D = \{(x,y) : x^۲ + y^۲ - ۲x \leq ۰\}$$

ب) (۲۰ نمره) فرض کنید خم بسته‌ی C **محل تلاقی رویه‌ی** $x^۲ + y^۲ = ۲x$ **با صفحه‌ی** $x + y + z = ۵$ **پیموده شده در جهت مثبت باشد. برای** $\mathbf{F} = (۲y^۲ - ۲x)\mathbf{i} + (۳ + ۲y^۲)\mathbf{j} + ۲z^۳\mathbf{k}$ **مطلوب است محاسبه‌ی** $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

---

۳) الف) (۲۰ نمره) حجم ناحیه‌ی T **محصور توسط دو مخروط به معادلات** $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ **و** $z = \sqrt{۳x^۲ + ۳y^۲}$ **و کره‌های به معادلات** $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ **و** $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ **را بیابید.**

ب) (۲۰ نمره) فرض کنید رویه‌ی بسته S **رویه‌ی محصور کننده‌ی** T **در قسمت (الف) باشد. برای** $\mathbf{F} = (x + yz^۲)\mathbf{i} + (y - x^۳z)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ **مطلوب است محاسبه‌ی** $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}d\sigma$.

موفق باشید

به نام پروردگار یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده‌ی علوم ریاضی

آزمون پایان ترم ریاضی عمومی II خردادماه ۱۳۹۰
مدت آزمون ۱۲۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی ....

شماره‌ی دانشجویی ....

نام خانوادگی مدرس...............................

شماره‌ی صندلی ....

محل آزمون ....

توجه:

۱) کارت دانشجوئی خود را روی صندلی و در دست‌رس مراقبین جلسه بگذارید.

۲) پاسخ هر پرسش را فقط در برگه‌ی مشخص شده و پشت آن بنویسید.

۳) نام، نام خانوادگی و نام‌خانوادگی مدرس خود را در همه‌ی صفحه‌های پاسخ‌نامه بنویسید.

در صورت ننوشتن نام خانوادگی مدرس نمره‌ی برگه صفر منظور می‌شود.

۴) **همراه داشتن** ماشین حساب و تلفن همراه تقلب محسوب می‌شود.

۵) در طول آزمون به هیچ پرسشی پاسخ داده نمی‌شود و خروج از جلسه‌ی آزمون به منزله‌ی پایان وقت امتحان است.

۶) برگه‌های پاسخ‌نامه را به هیچ وجه از هم جدا نکنید و از برگه‌ی آخر پاسخ‌نامه به عنوان پیش‌نویس استفاده کنید.

جمع نمره	۴	۳	۲	۱

نام و نام خانوادگی .... نام خانوادگی مدرس ....

شماره‌ی دانشجویی .... دانشکده‌ی علوم ریاضی

پرسش اول. تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^۳+y^۳}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$
مفروض است.

الف) نشان دهید که f در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست (۱۰ نمره).

ب) نشان دهید که مشتق سوئی f در $(۰,۰)$ و در سوی بردار یکانی $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ برابر با $a^۳ + b^۳$ است (۱۰ نمره).

ج) با استفاده از روش تکثیرکنندگان (ضرایب) لاگرانژ مقادیر a و b را با شرط $a^۲ + b^۲ = ۱$ به قسمی تعیین کنید که مشتق سوئی f در $(۰,۰)$ و در سوی $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ بیشترین مقدار را داشته باشد (۱۰ نمره).

نام و نام خانوادگی .... نام خانوادگی مدرس ....

شماره‌ی دانشجویی ....

پرسش دوم. فرض کنید R ناحیه‌ی محدود به خط‌های $x-y=۱$، $x-y=۳$، $x+y=۲$ و $x+y=۴$ باشد و خم C مرز آن باشد که در جهت مثبت (خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) پیموده شده است.

الف) مطلوب است محاسبه‌ی $\int\int_R (x^۲-y^۲)dA$ (۲۰ نمره).

ب) برای $\mathbf{F}(x,y)=(\frac{y^۳}{۳}-\frac{x^۵}{۵})\mathbf{i}+(\frac{x^۳}{۳}+y^۴)\mathbf{j}$ مطلوب است $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ (۱۰ نمره).

پرسش سوم. فرض کنید T ناحیه‌ی بسته و کرانداری در فضا باشد که به وسیله‌ی مخروط‌های $z = \sqrt{۳(x^۲ + y^۲)}$، $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و نیم‌کره‌ی $z = \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ محدود شده است.

الف) حجم ناحیه‌ی T را به‌دست آورید (۲۰ نمره).

ب) برای تابع برداری $\mathbf{F}(x, y, z) = (۳x + y^۲ + z^۳)\mathbf{i} + (x^۲ + ۲y + z^۳)\mathbf{j} + (x^۲ + y^۳ + z)\mathbf{k}$ مطلوب است محاسبه‌ی $\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ که $\mathbf{n}$ قائم یکانی رویه‌ی S، سطح محدود کننده‌ی T و رو به خارج است (۱۰ نمره).

پرسش چهارم. الف) مطلوب است محاسبه‌ی $\int\int_D (x^۲ + y^۲) dA$ که در آن $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ \mid x^۲ + y^۲ \leq ۴\}$ (۲۰ نمره).

ب) اگر خم C، محل تلاقی صفحه‌ی $z = ۵$ و سهمی‌گون $z = ۹ - x^۲ - y^۲$ در جهت مثبت (خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) پیموده شده باشد برای میدان برداری $F(x, y, z) = (۲z - y - y^۳)\mathbf{i} + (x^۳ - x + z)\mathbf{j} + (۳x - ۲y)\mathbf{k}$ مطلوب است محاسبه‌ی $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ (۱۰ نمره).

موفق باشید